

一类矩阵特征值的 Gerschgorin 型包含域^{*}

钟一兵^{1,2}, 关履泰²

(1 肇庆学院数学系, 广东 肇庆 526061;
2 中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘 要: 首先获得了矩阵非奇异的一类条件, 在此基础上, 给出了一类矩阵特征值的 Gerschgorin 型包含域, 最后给出了一个数值例子。

关键词: 特征值; Gerschgorin 圆盘; Brauer Cassini 卵形; 非奇异性; 不可约

中图分类号: O151.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 02-0005-04

矩阵特征值的计算与估计在实际应用中具有重要的意义。熟知的 Gerschgorin 圆盘, Brauer Cassini^[1] 卵形等都能对矩阵的特征值在复数平面上的位置作出一个较为准确的估计, 它们有着很多的推广和应用^[2-3]。文 [3] 给出了一类包含在 Gerschgorin 集中的特征值包含域。本文利用文 [3] 的思想, 给出了复数矩阵非奇异的一类条件, 从而得到了复数矩阵特征值的一类 Gerschgorin 型包含域。设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ 是 n 阶复方阵。记 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。 $\sigma(A)$ 表示 A 的全部特征值组成的集合。 $\forall i \in N$, 记

$$R_i(A) = \sum_{k \in N, k \neq i} |a_{ik}|, C_i(A) = \sum_{k \in N, k \neq i} |a_{ki}| \quad (1)$$

引理 1 (Gerschgorin) 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, λ 是 A 的任一特征值, 则存在 $k \in N$, 使得 $|\lambda - a_{kk}| \leq R_k(A)$ 。

记 $\Gamma_i(A) = \{z \in C: |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}$, $\Gamma(A) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i(A)$, $\Gamma_i(A)$ 称为 Gerschgorin 圆盘, $\Gamma(A)$ 称为 Gerschgorin 集。 $\sigma(A) \subseteq \Gamma(A)$ 。

1 主要结果

$A = (a_{ij})$ 的比较矩阵定义为 $M(A) = (m_{ij})$, 其中: $m_{ii} = |a_{ii}|$, $m_{ij} = -|a_{ij}|$, $i \neq j \forall i, j \in N$ 。 设 S 是 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$) 的任一非空子集, $S^c = N - S$ 表示 S 在 N 中的补集。 $\forall i \in N$, 记 $R_i^S(A) = \sum_{k \in S, k \neq i} |a_{ik}|$, $R_i^{S^c}(A) = \sum_{k \in S^c, k \neq i} |a_{ik}|$, $C_i^S(A) = \sum_{k \in S, k \neq i} |a_{ki}|$, $C_i^{S^c}(A) = \sum_{k \in S^c, k \neq i} |a_{ki}|$ 。

定理 1 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, α 是区间 $[0, 1]$ 中的任意一个数, 记 $\forall i \in N$, $x_i = \alpha R_i(A) + (1 - \alpha)C_i(A)$, 若 $\forall i \in S \forall j \in S^c, x_i > 0, |a_{ij}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha)C_j(A) > 0$, 且

$$\begin{aligned} & (|a_{ii}| - \alpha \sum_{k \in S, k \neq i} \frac{x_k}{x_i} |a_{ik}| - (1 - \alpha)C_i(A)) \\ & (|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha)C_j(A)) > \\ & \alpha^2 \frac{1}{x_i} R_i^S(A) \sum_{t \in S} x_t |a_{jt}| \end{aligned} \quad (2)$$

则 A 非奇异。

证明 令

$$G_i = \frac{|a_{ii}| - \alpha \sum_{k \in S, k \neq i} \frac{x_k}{x_i} |a_{ik}| - (1 - \alpha)C_i(A)}{\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A)}, i \in S, \quad (3)$$

$$g_j = \frac{\alpha \sum_{i \in S} x_i |a_{ji}|}{|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha)C_j(A)}, j \in S^c$$

如果 $\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) = 0$ 则令 $G_i = +\infty$ 。由 (2) 式, $G_i > g_j, \forall i \in S, \forall j \in S^c$, 因此存在一个正数 d 使得

$$G_i > d > g_j, \forall i \in S, \forall j \in S^c \quad (4)$$

根据假设, $\forall i \in S, x_i > 0$ 故而可构造正对角矩阵 $D = \text{diag}(d, d, \dots, d)$, 其中 $d_i = x_i, i \in S; d_i = d, i \in S^c$ 。记 $B = AD = (b_{ij})$, 则对 B 有

$$\begin{aligned} & (1) \forall i \in S \\ & |b_{ii}| - \alpha R_i(B) - (1 - \alpha)C_i(B) = x_i |a_{ii}| - \\ & \alpha \sum_{k \in S, k \neq i} x_k |a_{ik}| - (\alpha R_i^S(A))d - (1 - \alpha)x_i C_i(A) = \end{aligned}$$

* 收稿日期: 2006-09-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60475042); 广东省自然科学基金资助项目 (04011600)

作者简介: 钟一兵 (1972 年生), 男, 副教授, 博士; Email: ybm@zqn.edu.cn

$$x_i \left[|a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in S, t \neq i} \frac{x_t}{x_i} |a_{it}| - \left(\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) \right) d - (1 - \alpha) C_i(A) \right].$$

(I) 如果 $\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) = 0$, 则由假设 $x_i > 0$ 以及 (2) 式直接可得

$$|b_{ii}| - \alpha R_i(B) - (1 - \alpha) C_i(B) = x_i \left[|a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in S, t \neq i} \frac{x_t}{x_i} |a_{it}| - (1 - \alpha) C_i(A) \right] > 0$$

(II) 如果 $\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) \neq 0$ 则由假设 $x_i > 0$ 以及 (4), (3) 式, 可得

$$|b_{ii}| - \alpha R_i(B) - (1 - \alpha) C_i(B) > x_i \left[|a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in S, t \neq i} \frac{x_t}{x_i} |a_{it}| - \left(\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) \right) G_i - (1 - \alpha) C_i(A) \right] = 0$$

(2) $\forall j \in S$ 由 $|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha) C_j(A) > 0$, 以及 (4), (3) 式, 可得

$$|b_{jj}| - \alpha R_j(B) - (1 - \alpha) C_j(B) = d |a_{jj}| - \alpha \sum_{t \in S} x_t |a_{jt}| - (\alpha R_j^S(A)) d - (1 - \alpha) d C_j(A) = d \left(|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha) C_j(A) \right) - \alpha \sum_{t \in S} x_t |a_{jt}| > g_j \left(|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha) C_j(A) \right) - \alpha \sum_{t \in S} x_t |a_{jt}| = 0$$

于是 $\forall k \in N$, $|b_{kk}| > \alpha R_k(B) - (1 - \alpha) C_k(B)$. 即 $B = AD$ 是一个严格的 α -对角占优矩阵, A 为广义 α -对角占优矩阵, 依据文 [4] 的定理 4.1, 可知 A 为 H -矩阵. 所以 A 非奇异.

定理 2 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ 为不可约矩阵, α 是区间 $[0, 1]$ 中的任意一个数, 记 $\forall t \in N$, $x_t = \alpha R_t(A) + (1 - \alpha) C_t(A)$, 若 $\forall i \in S$, $\forall j \in S$ 有 $x_i > 0$, $|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha) C_j(A) > 0$ 且

$$\left[|a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in S, t \neq i} \frac{x_t}{x_i} |a_{it}| - (1 - \alpha) C_i(A) \right] \cdot \left[|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha) C_j(A) \right] \geq \alpha^2 \frac{1}{x_i} R_i^S(A) \sum_{t \in S} x_t |a_{jt}| \quad (5)$$

且 (5) 式中的不等式至少有一个严格成立的, 则 A 非奇异.

证明 G_i, g_i 如定理 1 中 (3) 式所定义, 由 (5) 式,

$$G_i \geq g_i, \quad \forall i \in S, \quad \forall j \in S \quad (6)$$

并且由命题条件, (5) 式中至少存在一个严格不等式, 从而存在数 l 使得

$$G_i \geq l g_i, \quad \forall i \in S, \quad \forall j \in S \quad (7)$$

由于 A 不可约, 故存在 $a_{ji} \neq 0, j \in S, i \in S$. 根据 g_i 的表达式 (3) 式, 因此有 $l > 0$. 构造正对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 其中 $d_i = x_i, i \in S; d_i = l, i \in S$. 记 $B = AD = (b_{ij})$, 则对 B 有

$$(1) \quad \forall i \in S, \quad |b_{ii}| - \alpha R_i(B) - (1 - \alpha) C_i(B) = x_i |a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in S, t \neq i} x_t |a_{it}| - (\alpha R_i^S(A)) l - (1 - \alpha) x_i C_i(A) = x_i \left[|a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in S, t \neq i} \frac{x_t}{x_i} |a_{it}| - \left(\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) \right) l - (1 - \alpha) C_i(A) \right]$$

(I) 如果 $\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) = 0$ 则由 $x_i > 0$ 以及 (5) 式直接可得

$$|b_{ii}| - \alpha R_i(B) - (1 - \alpha) C_i(B) = x_i \left[|a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in S, t \neq i} \frac{x_t}{x_i} |a_{it}| - (1 - \alpha) C_i(A) \right] \geq 0$$

(II) 如果 $\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) \neq 0$ 则由假设 $x_i > 0$ 以及 (7) 和 (3) 式, 可得

$$|b_{ii}| - \alpha R_i(B) - (1 - \alpha) C_i(B) \geq x_i \left[|a_{ii}| - \alpha \sum_{t \in S, t \neq i} \frac{x_t}{x_i} |a_{it}| - \left(\frac{1}{x_i} \alpha R_i^S(A) \right) C_i - (1 - \alpha) C_i(A) \right] = 0$$

(2) $\forall j \in S$ 由 $|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha) C_j(A) > 0$ 以及 (7) 和 (3) 式, 可得

$$|b_{jj}| - \alpha R_j(B) - (1 - \alpha) C_j(B) = l |a_{jj}| - \alpha \sum_{t \in S} x_t |a_{jt}| - (\alpha R_j^S(A)) l - (1 - \alpha) l C_j(A) = l \left(|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha) C_j(A) \right) - \alpha \sum_{t \in S} x_t |a_{jt}| \geq g_j \left(|a_{jj}| - \alpha R_j^S(A) - (1 - \alpha) C_j(A) \right) - \alpha \sum_{t \in S} x_t |a_{jt}| = 0$$

于是 $\forall k \in N$, $|b_{kk}| \geq \alpha R_k(B) - (1 - \alpha) C_k(B) \geq R_k^a(B) C_k^{1-a}$, 并且由于 (5) 式 (或者 (7) 式) 之中至少有一个不等式是严格成立的, 因此由上面的推导过程, 至少存在一个 k 使得 $|b_{kk}| \geq \alpha R_k(B) - (1 - \alpha) C_k(B) > R_k^a(B) C_k^{1-a}$ 严格成立. 又 A 不可约, 故 $B, M(A)$ 与 $M(B)$ (A 与 B 的比较矩阵) 不可约, 依据文 [5] 的引理 2 可知 $M(B)$ 为 H -矩阵和 M -矩阵. 从而 A 也为 H -矩阵. 所以 A 非奇异. 证毕.

$\forall i \in S, \forall j \in S$, 记集合

$$\Phi_j^S = \left\{ z \in C \mid |z - a_{jj}| \leq \alpha R_j^S(A) + (1 - \alpha) C_j(A) \right\} \quad (\forall i \in S)$$

$$\Psi_{ij}^S = \left\{ \begin{array}{l} z \in C \mid \left(\left| z - a_{ii} \right| - a \sum_{\substack{\ell \in S \\ \ell \neq i}} \frac{x_\ell}{x_i} \mid a_{it} \right| - (1-a) C_i(A) \right) \cdot \\ \left(\left| z - a_{jj} \right| - a R_j^S(A) - (1-a) C_j(A) \right) \leq \\ a^2 \frac{1}{x_i} R_i^S(A) \sum_{\ell \in S} x_\ell \mid a_{jt} \mid \end{array} \right\}$$

定理 3 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, α 是区间 $[0, 1]$ 中的任意一个数, 记 $\forall t \in N, x_t = \alpha R_t(A) + (1-\alpha)C_t(A)$, 若 $\forall i \in S, x_i > 0$, 则 A 的任一特征值位于下列并集之中, 即

$$\sigma(A) \subseteq \left(\bigcup_{j \in S} \Phi_j^S \right) \cup \left(\bigcup_{i \in S, j \in S} \Psi_{ij}^S \right) \quad (8)$$

证明 设 λ 是 A 的任一特征值, 则 $\lambda E - A$ 不可逆, 故不能满足定理 1 的全部条件。

注 1 在定理 3 中有一个条件: $\forall i \in S, x_i > 0$ 。如果此条件不能满足, 则 a_{ii} 是 A 的特征值, 此时只需要考虑 a_{ii} 在 A 中的余子矩阵即可。

在定理 1 与定理 3 中取 $\alpha = 1$, 则可得以下更为简化的特征值包含域。

推论 1 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, 记 $\forall t \in N, y_t = R_t(A)$, 若 $\forall i \in S, y_i > 0$, 则 A 的任一特征值位于下列并集之中

$$\sigma(A) \subseteq \left(\bigcup_{j \in S} \Phi_j^{S,1} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in S, j \in S} \Psi_{ij}^{S,1} \right)$$

其中, $\Phi_j^{S,1} = \left\{ z \in C \mid \left| z - a_{jj} \right| \leq R_j^S(A) \right\} \quad (\forall j \in S)$

而

$$\Psi_{ij}^{S,2} = \left\{ z \in C \mid \left(\left| z - a_{ii} \right| - \sum_{\substack{\ell \in S \\ \ell \neq i}} \frac{y_\ell}{y_i} \mid a_{it} \right| \cdot \left(\left| z - a_{jj} \right| - R_j^S(A) \right) \leq \frac{1}{y_i} R_i^S(A) \sum_{\ell \in S} y_\ell \mid a_{jt} \mid \right\}$$

推论 2 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, 则 A 的任一特征值位于下列并集之中

$$\sigma(A) \subseteq \left(\bigcup_{j \in S} \Phi_j^{S,2} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in S, j \in S} \Psi_{ij}^{S,2} \right)$$

其中, $\Phi_j^{S,2} = \left\{ z \in C \mid \left| z - a_{jj} \right| \leq R_j^S(A) \right\} \quad (\forall j \in S)$

而

$$\Psi_{ij}^{S,2} = \left\{ z \in C \mid \left(\left| z - a_{ii} \right| - R_i^S(A) \right) \cdot \left(\left| z - a_{jj} \right| - R_j^S(A) \right) \leq R_i^S(A) R_j^S(A) \right\}$$

证明 在定理 1 的证明过程中, 取 $\alpha = 1$, 并将 $\forall t \in N, x_t$ 都取为常数, 如 $x_t = \max_{i \in N} R_t(A)$, 再次完全重复定理 1 与定理 3 的证明过程, 即可获得结论。证毕。

注 2 推论为文 [3] 之定理 6 也是该文的主要结果。

2 一个算例

例设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A 的 Gerschgorin 集为

$$\Gamma(A) = \{ z \in C \mid |z - 1| \leq 1 \} \cup$$

$$\{ z \in C \mid |z - i| \leq 1 \} \cup \{ z \in C \mid |z + 1| \leq 1 \},$$

取 $S = \{1, 2\}, S = \{3\}, \alpha = 1$, 则推论 1 所给区域为

$$\Gamma(A) = \{ z \in C \mid \left(\left| z - 1 \right| - \frac{1}{2} \right) \mid z + 1 \mid \leq \frac{1}{2} \}$$

$$\cup \{ z \in C \mid |z - i| \mid z + 1 \mid \leq 1 \} \cup \{ -1 \}$$

区域如图 1 所示。

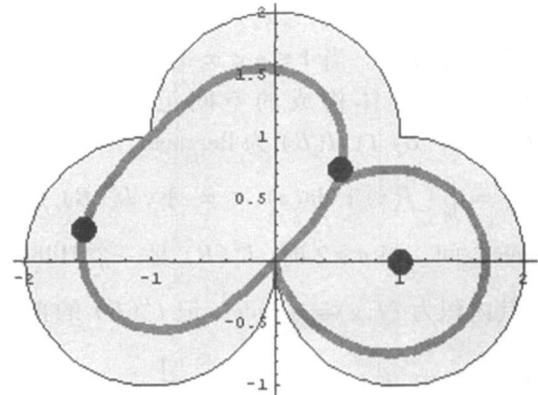


图 1 最外面的为 Gerschgorin 集; 粗线围成的区域为推论 1 所给区域; 大黑点为 A 的 3 个特征值

Fig. 1 Gerschgorin set is bounded by most external lines. The area given by corollary 1 is bounded by bold lines. The dark dots are the eigenvalues of A .

参考文献:

[1] BRAUER A. Limits for the characteristic roots of a matrix [J]. Duke Math J. 1947(14): 21-26

[2] VARGA R S. Gerschgorin and His Circles [M]. Berlin: Springer Verlag, 2004.

[3] CVETKOVIC L J, KOSTE V, VARGA R S. A new Gerschgorin type eigenvalue inclusion set [J]. Electronic Transactions on Numerical Analysis, 2004(18): 73-80

[4] 李继成, 张文修. H -矩阵的判定 [J]. 高等学校计算数学学报, 1999(3): 264-223

[5] 高福顺, 孙玉祥. M -矩阵的判定 [J]. 应用数学学报, 1998 21(4): 535-538

(下转第 19 页)

横弯曲组合变形，采用新的失稳判据 $\delta_{\max}/l_0=1\%$ 或 $\delta_{\max}/l_0=2.52\%$ ，从理论分析和实验结果来看是合理的。

参考文献:

[1] 姜清海, 张开成, 刘斌, 等. 自平衡杆索结构位移和内力的有限分析计算[J]. 机电工程技术, 2003 32 (6): 41 - 44

[2] 蔡铭, 姜清海, 郭金基, 等. 自平衡体系结构有限分析计算方法研究[J]. 广东土木与建筑, 2004 7: 1 - 4

[3] 姜清海, 张开成, 刘斌, 等. 幕墙自平衡非对称结构内力和位移的计算与实验研究[J]. 机电工程技术, 2004 33(2): 27 - 31.

[4] 蔡铭, 姜清海, 郭金基 等. 幕墙杆索结构有限分析计算方法的研究[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2005 44(6): 32 - 35 40

[5] 蔡铭, 毛伙南, 郭金基 等. 幕墙杆索结构的稳定性研究[J]. 广东土木与建筑, 2005 12 3 - 5

[6] 蔡铭, 姜清海, 郭金基 等. 幕墙自平衡体系结构有限分析计算软件的研究[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2004 43(5): 24 - 27.

[7] 徐道远, 黄孟生. 材料力学[M]. 南京: 河海大学出版社, 2001: 153 - 155

[8] 建筑工程常用数据系列手册编写组. 建筑结构常用数据手册, 下册[M]. 北京: 中国建筑工程出版社, 1997 1009 - 1010

Vertical and Horizontal Bending Calculation and Stability Analysis of Curtain Wall Strut Bar

CAI Ming¹, MAO Huo-nan², GUO Jin-jie¹, ZHANG Kai-dong², TANG Zhu-duang², CUI Chuan-qin²
(1. School of Engineering Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275 China
2. Zhongshan Shengxing Curtain Wall Co. Ltd. Zhongshan 528412 China)

Abstract A vertical and horizontal bending calculation of the supporting pole in curtain wall strut cable structure is presented and the stability of the pole is discussed. The bending differential equations of supporting pole with axial and lateral loads are established and the particular processes of solving the equations are given. A new instability criterion of the pole is founded with the help of experiments. Then critical stress formulas of strut bar are improved with the modifying coefficients. The experimental results show that the improved formulas are precise and valid.

Key words curtain wall supporting pole; vertical and horizontal bending; bending differential equations; instability criterion

(上接第 7 页)

A Class Gerschgorin-type Inclusion Area for Eigenvalue of Matrix

ZHONG Yi-bing^{1, 2}, GUAN Li-tai²
(1. Department of Mathematics, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, China
2. Department of Scientific Computing and Computer Applications, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract Firstly, a class of conditions of matrix being nonsingular is obtained and equivalently, a class of Gerschgorin inclusion area of matrix is presented. At last, an example is given.

Key words eigenvalue, Gerschgorin disk, Brauer-Cassini oval, nonsingularity, irreducibility